

SIMULATION MATHÉMATIQUE D'UN REJET THERMIQUE SOUS UNE
COUVERTURE DE GLACE

par

M. Megzari, R. Kahawita
Ecole Polytechnique de Montréal

et

S. Sarraf
Concordia University
Montréal

Notre but dans ce rapport, qui est une partie d'une étude préliminaire sur la formation de la glace, est de dégager un modèle mathématique qui nous permettra:

- De calculer le champ de température;
- de calculer le champ de vitesse;
- de prévoir les surfaces découvertes de glace sur une rivière ou un lac, (ou vice versa).

Le schéma numérique adopté pour la solution des équations hydrodynamiques est celui de MacCormak utilisé en aéronautique. Vu les résultats satisfaisants obtenus, on utilisera le même schéma pour résoudre l'équation d'énergie afin de déterminer le champ de température. En complétant ce système d'équation par les données météorologiques et une équation supplémentaire à l'interface eau-glace-air, on pourra déterminer un bilan thermique à chaque maille, ainsi que l'épaisseur de glace, vitesse et température moyennes locales.

Les méthodes développées jusqu'à maintenant sont basées sur un calcul global du point de vue thermique, vitesse et température par section, ainsi que la quantité de glace formée.

Après avoir supposer un couvert de glace de 80cm d'épaisseur sur un lac typique dont on connaît la bathymétrie, on appliquera le modèle mathématique pour déterminer l'évolution en dégageement de glace sur la surface avec le temps, causé par l'injection de l'eau chaude dans le lac.

Actuellement on apporte des changements sur ce modèle pour tenir compte de la formation et du transport de frasil.

Introduction

Le régime thermique joue un rôle important dans des études hydrauliques concernant des aménagements des rivières nordiques. Typiquement, il concerne l'analyse de variation dans l'espace et le temps du régime (couverture) de glace, la production de frasil, la glace des rives, les constrictions des prises d'eau etc. Dans ces études, un besoin pour la simulation d'une rivière au régime de glace se manifeste.

Notre but est de mettre au point un programme permettant de simuler:

- La formation de la glace
- La croissance de la glace de rive
- La détermination du champ de vitesse et de température dans le domaine à étudier.
- Prévoir les surfaces couvertes (ou découvertes) de glace dans une rivière ou un lac.

Pour cela on utilise les équations de Saint-Venant pour la partie hydrodynamique [1].

* L'équation de conservation de la masse:

$$(1) \quad \frac{\delta H}{\delta t} + \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y} = 0$$

* L'équation de quantité de mouvement dans la direction de x :

$$(2) \quad \frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} = FV + \frac{\tau_x^B}{\rho} + gH(S_{0x} - S_{fx}) + 2 \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon \frac{\delta U}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon \frac{\delta U}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta V}{\delta x} \right) - \frac{H}{\rho} \frac{\delta P^B}{\delta x} - \frac{gH^2}{2\rho} \frac{\delta \rho}{\delta x}$$

* L'équation de quantité de mouvement dans la direction de y :

$$(3) \quad \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{\delta G}{\delta x} + \frac{\delta S}{\delta y} = -FV + \frac{\tau_y^B}{\rho} + gH(S_{0y} - S_{fy}) + 2 \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon \frac{\delta V}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon \frac{\delta V}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta U}{\delta y} \right) - \frac{H}{\rho} \frac{\delta P^B}{\delta y} - \frac{gH^2}{2\rho} \frac{\delta \rho}{\delta y}$$

* L'équation d'énergie pour le champ de température [2] est la suivante :

$$(4) \quad \frac{\delta HT}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x}(UT) + \frac{\delta}{\delta y}(VT) = \frac{\delta}{\delta x}(HD_x(\frac{\delta T}{\delta x})) + \frac{\delta}{\delta y}(HD_y(\frac{\delta T}{\delta y})) + HS_E$$

* L'équation qui régit l'évolution de la glace de rive est donnée [3] par :

$$(7) \quad \rho_i L \frac{\delta \theta}{\delta t} = K_i \frac{\delta T}{\delta z} - H_{E0} (T_E - T_F)$$

Méthode Numérique

Le schéma numérique adopté pour résoudre les équations hydrodynamiques est celui de Mac-Cormack. C'est une méthode explicite aux différences finies en deux demi-pas de temps, Prédicteur-Correcteur [4,5,6]. La stabilité numérique est contrôlée par le Nombre de Courant qui doit être inférieur à 1 [56], par conséquent le pas de temps doit satisfaire la condition suivante:

$$\Delta t < \left[\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{gH + V_m} \right]^{1/2}$$

avec $V_m = (U^2 + V^2)^{1/2}$

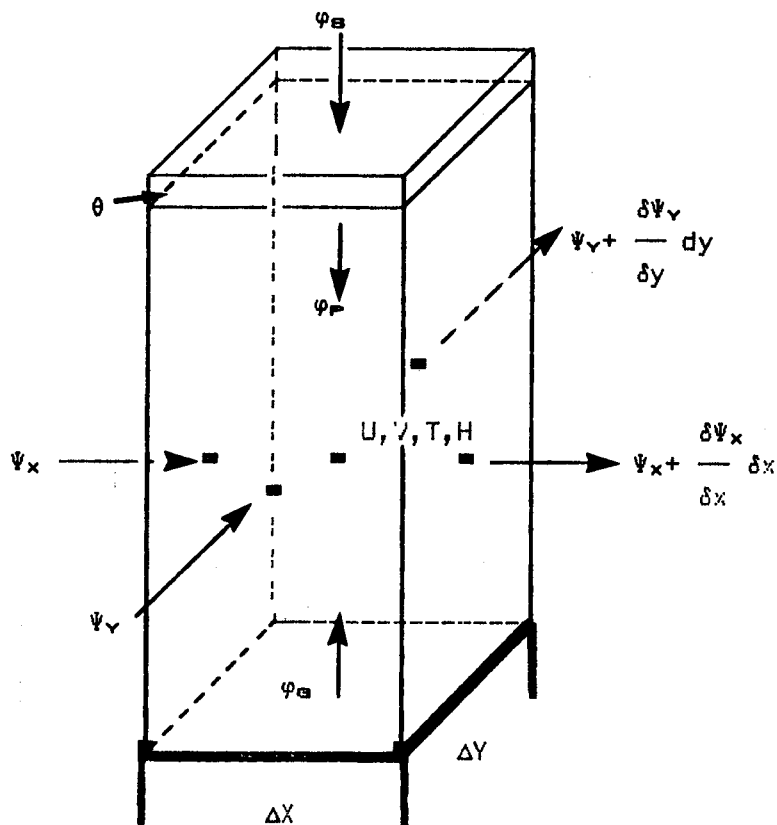
Vue les résultats satisfaisants obtenus [7] on utilisera le même schéma pour résoudre l'équation d'énergie, afin de déterminer le champ de température.

En complétant ce système d'équation par les données météorologiques, on pourra établir un bilan thermique à la surface de l'eau à chaque maille, ainsi que l'épaisseur de glace, vitesse et température moyenne locales.

Les méthodes numériques développées jusqu'à maintenant sont basées sur un calcul global de point de vue thermique, vitesse et température par section, ainsi que la quantité de glace formée [8,9,10,11,12].

Schéma de calcul

On subdivise le domaine en cellules parallélépipédiques de la forme suivante :



avec

$$\begin{aligned} \Psi &= \{ U, T, H \} \\ \varphi_s &= \{ S_E, \tau^E, \bar{z}_E \} \\ \varphi_P &= \{ \bar{z}_E, \tau^E \} \\ \varphi_s &= \{ \bar{z}_E \} \end{aligned}$$

Au centre de chaque cellule est appliqué le vecteur de la vitesse moyenne, la température moyenne, et la hauteur moyenne

Sur la surface libre les contraintes appliquées sont:

- Contrainte du vent sur l'eau
- Contrainte du couvert de glace sur l'eau

Sur la surface inférieure les contraintes appliquées sont:

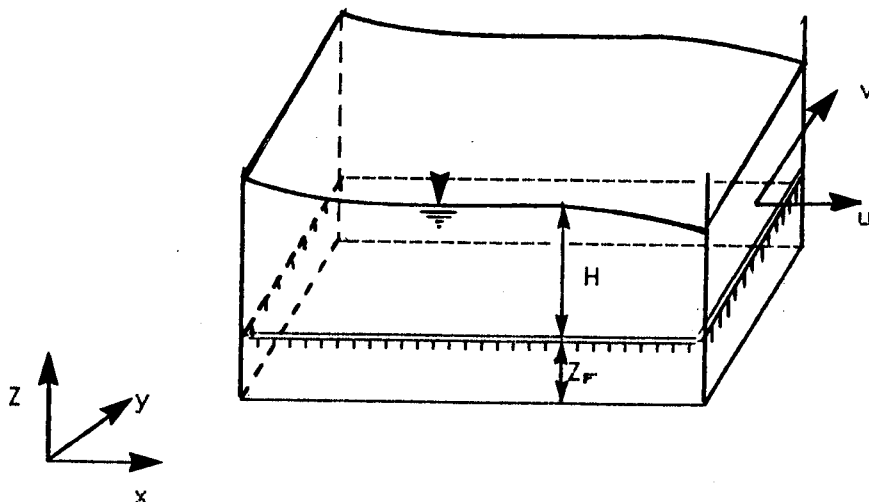
- Contrainte de frottement du fond sur l'eau
- Contrainte de frottement, causée par la glace de fond, sur l'eau; (on n'en tiendra pas compte pour le moment) .

Calculs des différents termes d'équations

a) Pour les équations de Saint-Venant

$$(2) \quad \frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} = FV + \frac{\tau_{x^B}}{\rho} + gH(S_{0x} - S_{Fx}) + 2 \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta U}{\delta x} \right)$$

$$+ \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta U}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta V}{\delta x} \right) - \frac{H}{\rho} \frac{\delta P^B}{\delta x} - \frac{gH^2}{2\rho} \frac{\delta \rho}{\delta x}$$



avec la contrainte de fond définie par :

$$\tau_{x^B} = -\rho g R_H S_{Fx}$$

et

$$S_{Fx} = \frac{n_B^2 U (U^2 + V^2)^{1/2}}{R_H^{4/3}}$$

celle de surface est définie par :

$$\tau_{x^B} = -\rho g \frac{n_B^2 U (U^2 + V^2)^{1/2}}{R_H H^2}$$

dont n : Nombre de MANNING en $s/M^{1/3}$
s : indice indiquant la surface
b : indice indiquant le fond (bottom)
U : u H
V : v H
F : $u^2 H + g H^2/2$
G : u v H
S : $v^2 H + g H^2/2$
P^s : pression à la surface
ε : tau de turbulence égale à 0.5
R_H : rayon hydraulique Le rayon hydraulique est égal à H hauteur de l'eau si la surface est libre ,et à H/2 si la surface est couverte de glace

b) L'équation d'énergie

$$(4) \quad \frac{\delta HT}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x}(UT) + \frac{\delta}{\delta y}(VT) = -\frac{\delta}{\delta x}(HD_x(\frac{\delta T}{\delta x})) + \frac{\delta}{\delta y}(HD_y(\frac{\delta T}{\delta y})) + HS_{\epsilon}$$

avec T : température de l'eau en °C
S_ε : terme de source sur la surface d'eau
D : terme de diffusion de la chaleur dans l'eau
tel que D est définie par:

$$D = \alpha R_H U_* \quad \text{et} \quad U_* = (\tau/\rho)^{1/2}$$

par conséquent on a :

$$D = \alpha R_H [(\tau_B/\rho)^{1/2} + (\tau_B/\rho)^{1/2}]$$

Le choix de α est très difficile car les avis diffèrent suivant les auteurs [14,15,16,17], il peut varier de 0.1 à 20. Les valeurs de α présent sont : α_x = 7.35 et α_y = 14.35

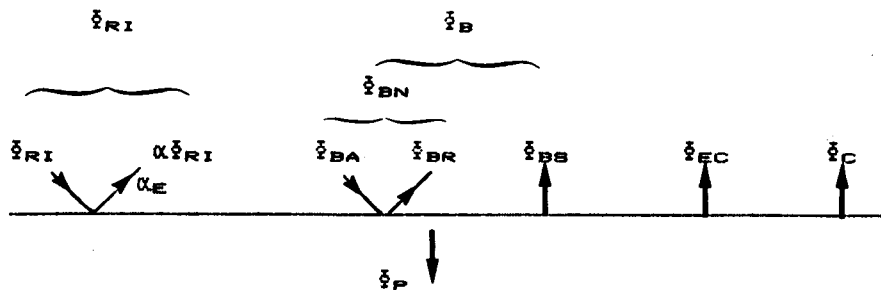
Le terme source s_ε est défini par :

$$S_{\epsilon} = \frac{\dot{q}_s}{H \rho_{\epsilon} C_p}$$

\dot{q}_s est le flux d'énergie cédée ou fournie à la surface de chaque cellule. Une fois que la température de l'eau a atteint une température minimale T_L voisinant de 0 C. Toute l'énergie excédente servira à la formation de la glace. La valeur de T_L dépend de l'épaisseur de la couche limite thermique ,dynamique ,et de l'épaisseur de mélange ,qui sont différentes pour une rivière ou pour un lac \

Bilan thermique à la surface d'une maille

* Surface libre



$$\dot{q}_B = (1 - \alpha_I) \dot{q}_{RI} + (1 - \alpha_I) \dot{q}_{BA} - \dot{q}_{BS} - \dot{q}_{EC} - \dot{q}_C$$

$$\dot{q}_{BS} = \epsilon_m \sigma T_B^4$$

$$\dot{q}_E = C_E [1.56 [B + 0.35(T_B - T_A)] + 6.08 V_A] (E_B - E_A)$$

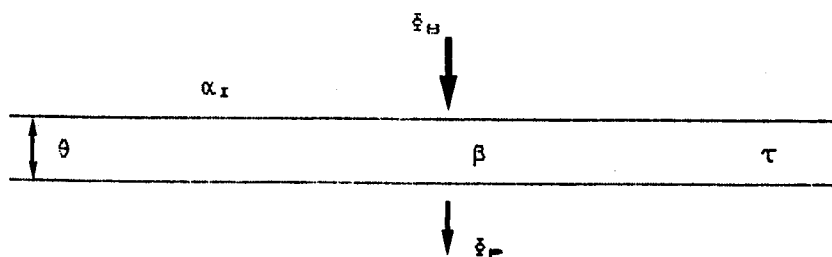
$$\dot{q}_C = C_C [B + 0.35(T_B - T_A) + 3.9 V_A] (T_B - T_A)$$

avec

- \dot{q}_B : flux d'énergie à la surface de la cellule
- α_E : coefficient de réflexion de la lumière sur la surface de l'eau
- \dot{q}_{EC} : flux d'énergie emporté par l'évaporation, et la condensation
- \dot{q}_C : flux d'énergie emporté par convection
- \dot{q}_{BS} : flux d'énergie émis par la surface
- \dot{q}_{RI} : rayonnement direct
- \dot{q}_B : rayonnement diffus
- σ : constante de Boltzman = $5,665 \cdot 10^{-8} \text{ W/M}^2$
- ϵ_m : émissivité de la surface
- \dot{q}_C : flux d'énergie emporté par convection
- V_A : vitesse du vent
- T_A : température de l'air
- T_B : température de surface
- E_A : pression saturante de l'air

Les coefficients C_C et C_E sont égaux à 1 à surface libre et égaux à 0.5 à surface couverte [18,19].

* Surface couverte de glace



$$\dot{q}_s = (1-\alpha_I)(1-\beta)\dot{q}_{RI} + (1-\alpha_I)\dot{q}_{BA} - \dot{q}_{BS} - \dot{q}_{EC} - \dot{q}_C$$

$$\dot{q}_P = \dot{q}_{RI}(1-\alpha_I)\beta e^{-\tau\theta}$$

avec

\dot{q}_s : flux d'énergie à la surface de la cellule couverte de glace

\dot{q}_P : flux d'énergie passant à travers la glace

α_I : coefficient de réflexion de la lumière sur la glace

θ : épaisseur de couvert de glace

τ : coefficient d'extinction de la lumière à travers la glace $\approx 0.7/\text{cm}$

β : fraction de lumière non absorbée par la glace

En supposant que le transfert de chaleur ne se fait que par conduction dans la glace [20], la température de surface est alors déterminée par \dot{q}_s à l'aide de l'équation suivante :

$$\dot{q}_s = -K_I \frac{T_F - T_S}{\theta}$$

par conséquent : $T_S = \dot{q}_s \theta / K_I + T_F$

T_F = température de fusion de la glace égale à 0 C

L'équation qui régit l'évolution de la glace de rive [21] est donnée par :

$$(7) \quad \rho_I L \frac{\delta\theta}{\delta t} = K_I \frac{\delta T}{\delta z} - H_{EG} (T_E - T_F)$$

avec H_{EG} : coefficient de transfert de chaleur par convection entre l'eau et la glace en $\text{W/M}^2\text{C}$

T_E : température de l'eau

Le coefficient de transfert de chaleur par convection est défini à l'aide du nombre de Nusselt [22] par

$$Nu = 0.023 R_e^{0.8} P_r^{0.3}$$

ou bien par l'introduction du coefficient de frottement (coefficient de drag) en fonction du coefficient de Manning à l'interface eau-glace et au fond de la rivière

$$(11) \quad \frac{f}{2} = \frac{\tau_o}{\rho V^2} = g \frac{n_B^{3/2} n_o^{1/2}}{1.76 R_H^{1/3}} = \frac{N_u}{R_e P_r^{0.3}}$$

avec $R_e = V L / \nu$ Nombre de Reynolds

$P_r = H_{EG} L / K_x$ Nombre de Prandtl

$$n_o = \left[\frac{(n_B)^{3/2} + (n_B)^{3/2}}{2} \right]^{2/3}$$

n_o est le Nombre de Manning équivalent en tenant compte de n_B à la surface et n_B au fond [23,24,25].

on aboutit alors à :

$$H_{EG} = 9.36 \cdot 10^6 (n_B)^{3/2} (n_o)^{1/2} V (R_H)^{1/3}$$

Exploitation du Modèle Mathématique

Après avoir supposé un couvert de glace de 80 cm d'épaisseur sur le Lac Delaney dont connaît la bathymétrie. On applique ce modèle mathématique pour prédire les surfaces dégagées de glace sous les conditions suivantes:

- L'injection de l'eau chaude à 30 C.
- Une température d'air de 15 C.
- Une vitesse du vent de 40 Km/H, avec un maximum de 60 Km/H se situant vers la mi-journée.
- Un rayonnement maximal de la journée de 1200 W/M².

Sur les figures suivantes on peut voir le champ de vitesse dans le lac ainsi que les courbes de niveau du couvert de glace, et les isothermes pour différents temps.

Conclusion

Ce modèle mathématique nous a permis un contrôle satisfaisant de l'évolution de la glace sur un lac, ainsi que la prévision des surfaces dégagées. De même il nous a permis de déterminer le champ de vitesse, de température, le coefficient d'échange thermique eau-glace, d'une façon précise à chaque maille.

Ceci va nous faciliter la tâche pour l'introduction des équations :

- du frazil actif.
- du frazil inactif.
- de la glace à la dérive.
- des barrages de glace suspendue.

Bibliographie

- (1) RICHARD H. FRENCH : Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill. 1985
- (2) ADRIAN BEJAN : Convective Heat Transfer , WILEY-INTERSCIENCE John Wiley & Sons, 1984
- (3) ECKERT & DRAKE : Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, 1972
- (4) ROBERT W. MACCORMACK : An Efficient Explicit-Implicit- Characteristic Method for Solving the Compressible Navier-Stokes Equations. SIAM-AMS PROCEEDINGS , Vol II, 1978.
- (5) SUHAS.V.PATANKAR : Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, 1980
- (6) B.P. LEONARD : A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, VOL 19, 1979, pp(59-98).
- (7) FRANCISCO.R.GARCIA : Mathematical Modeling of Two Dimensional Hydraulic Problems Using a Fully-Dense Finite-Difference Scheme, M.Sc.A Dept de Genie Civil, Ecole Polytechnique de Montréal 1983
- (8) MICHEL.B : Winter Regime of Rivers and Lakes, Cold Regions Science and Engineering ,U.S. Army Corps of Engineers, April 1971
- (9) HUNG TAO SHEN, and POOJITHA D.YAPA : Computer Simulation of Ice Cover Formation on The Upper St-Lawrence River. Workshop on Hydraulics of River Ice June 1984. University of New Brunswick ,pp(227-244)
- (10) AKIO WAKE and RALPH R. RUMER : Modelling the Ice Regime of Lake Erie. Trans of ASCE, July 1979. HY7
- (11) Ateliers de Travail Dynamique des glaces Tome 1 et 2 Hydro-Québec 1983

- (12) N. MARCOTTE : Heat Transfer From Open-Water Surfaces in Winter, pp(2-17)
- (13) PATRICK.J.ROACHE : Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers. 1976
- (14) ROGER. A.FALCONER : Temperature Distribution in a Tidal Flow Field, ASCE, Journal of Environmental Engineering, Vol.110, No.6, June, 1984, pp(1099-1116)
- (15) J.W.ELDER : The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow. J.Fluid. Mech, pp(544-560), 1959
- (16) S. BELTAOS : Transverse Mixing in Natural Streams, Can. Jour. Civ. Eng, VOL 6, pp(575-591),1979.
- (17) ASHOK K. RASTOGI and WOLFGANG RODI : Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels. ASCE March 1978 HY3.
- (18) T.MCFADDEN : Radiation and Evaporation Heat Loss During Ice Fog Conditions pp(18-28)
- (19) POOTHRIKKA P. PAILY, ENZO D. MACAGNO and JOHN F. KENNEDY : Winter-Regime Thermal Response of Heated Streams. ASCE April 1974, HY4.
- (20) HUNG TAO SHEN : Hydraulics of River Ice : Departement of Civil and Environmental Engineering Clarkson University Potsdam.NewYork, August 1985
- (21) B.MICHEL : Ice Mechanics. Les presses de l'Université Laval Québec,1978
- (22) J.E.COWLEY and S.T.LAVENDER : Convective Heat Transfer at an Ice-Water Interface, pp(60-76)
- (23) MEHMET SECIL UZUNER : The Composite Roughness of Ice Covered Streams . Journal of Hydraulic Research ,13 (1975) No.1.
- (24) A.WANKIEWICZ : Analysis of Winter Heat Flow in an Ice-Covered Arctic Stream. Can.J.Civ.Eng, 11,pp(430-443).1984
- (25) PETER LARSEN : Hydraulic Roughness of Ice Covers. ASCE January 1973 HY1.

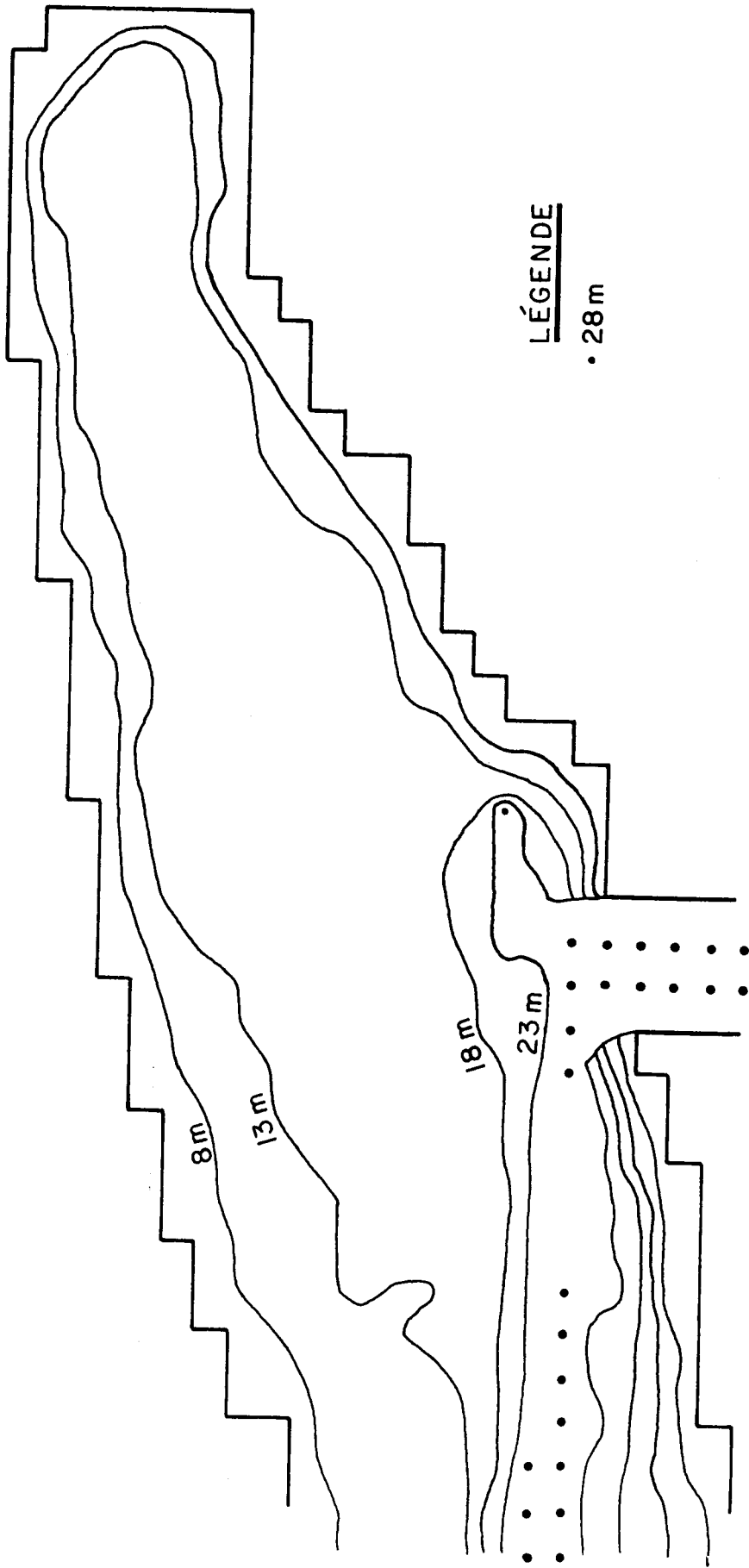


Figure 1 BATHYMÉTRIE

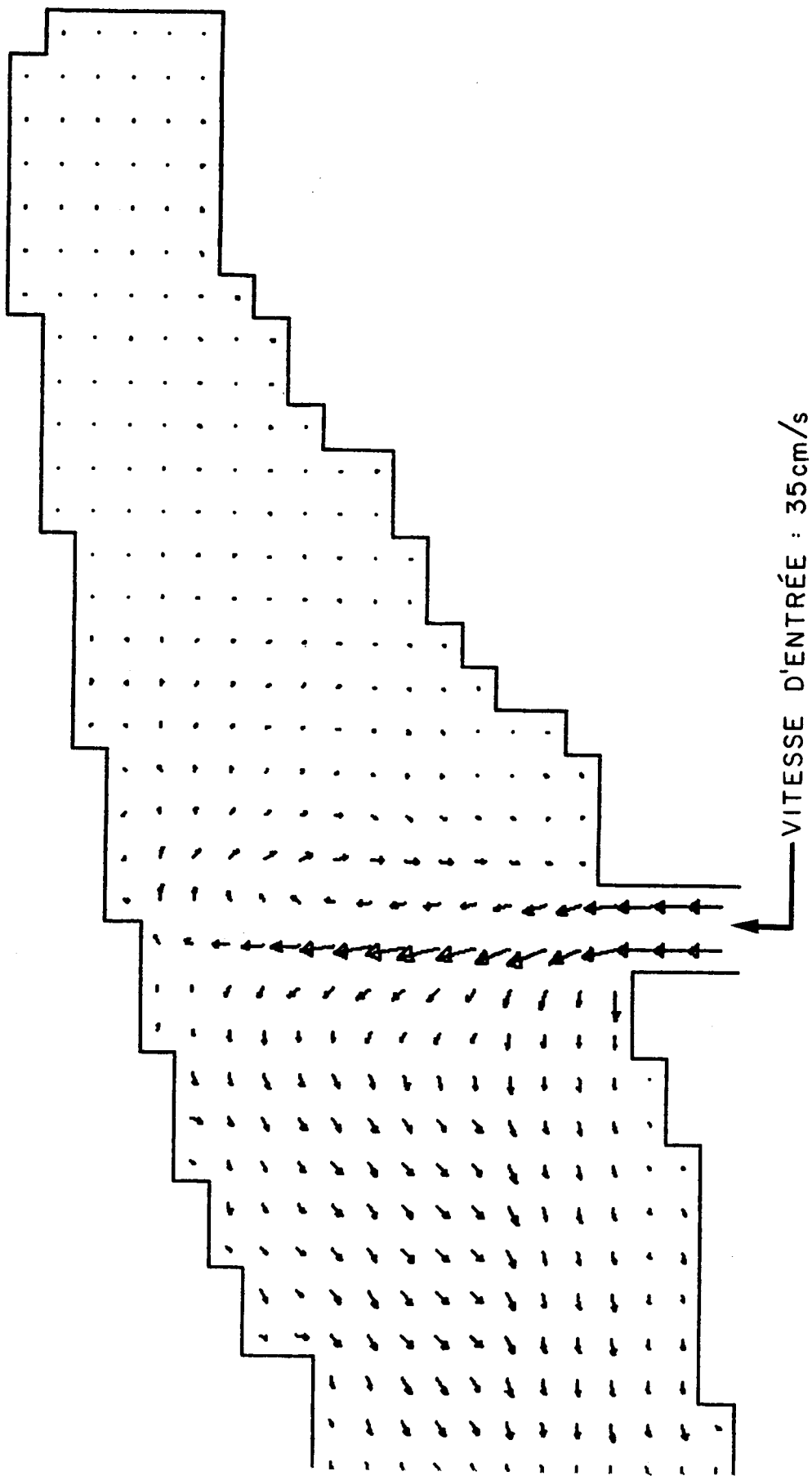


Figure 2 CHAMPS DE VITESSES

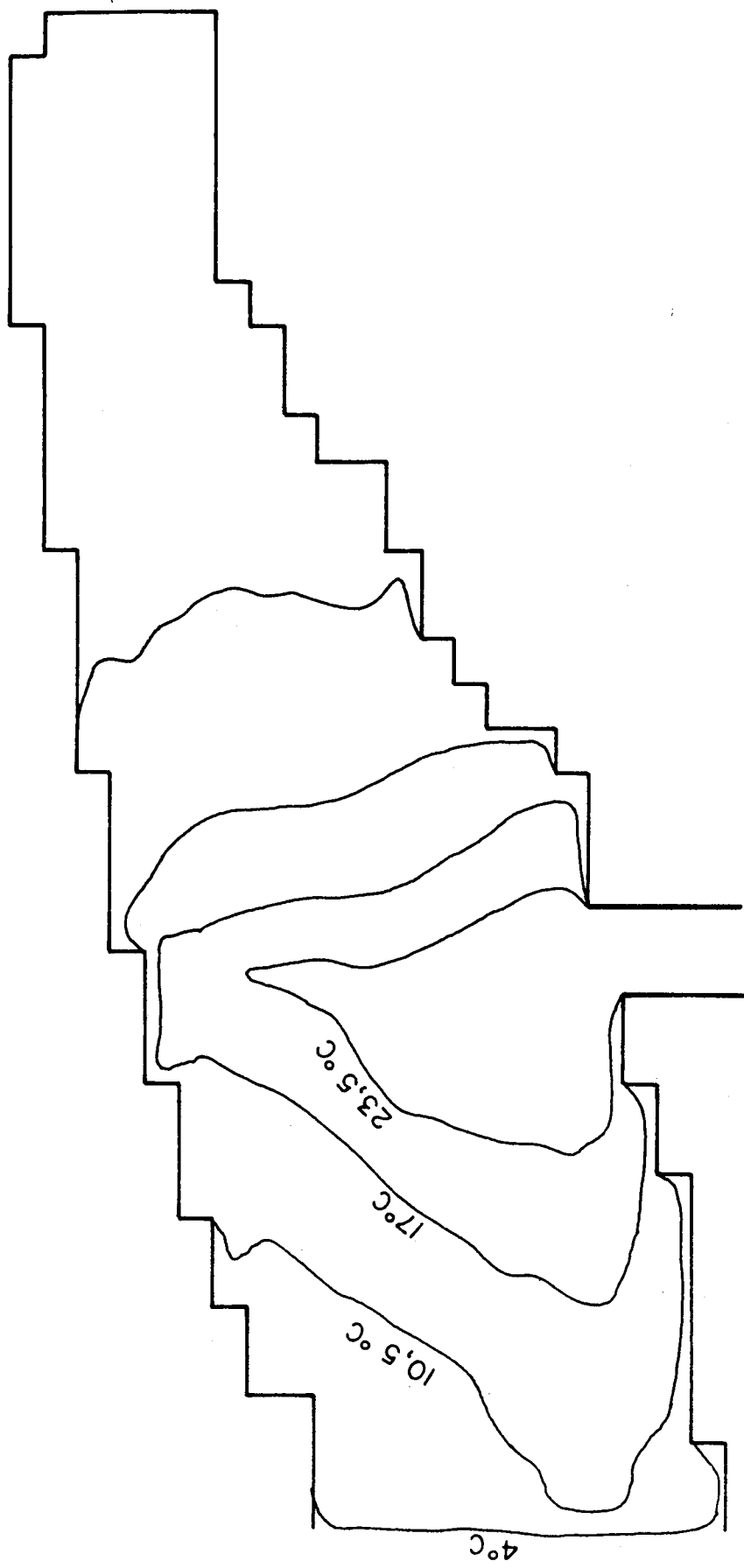


Figure 3 ISOTHERMES APRÈS 25 HEURES

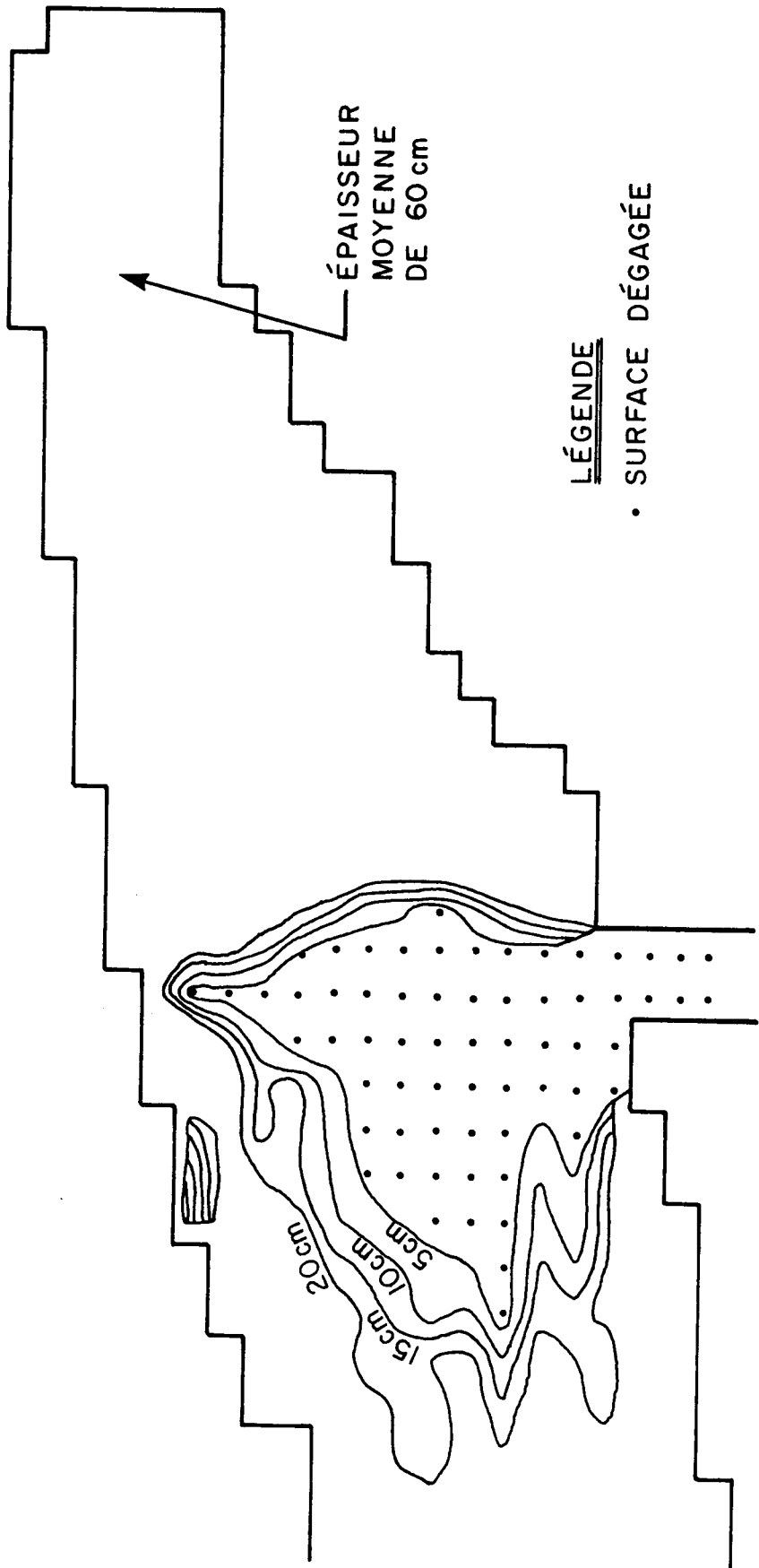


Figure 4 SURFACE DÉGAGÉE APRÈS 25 HEURES

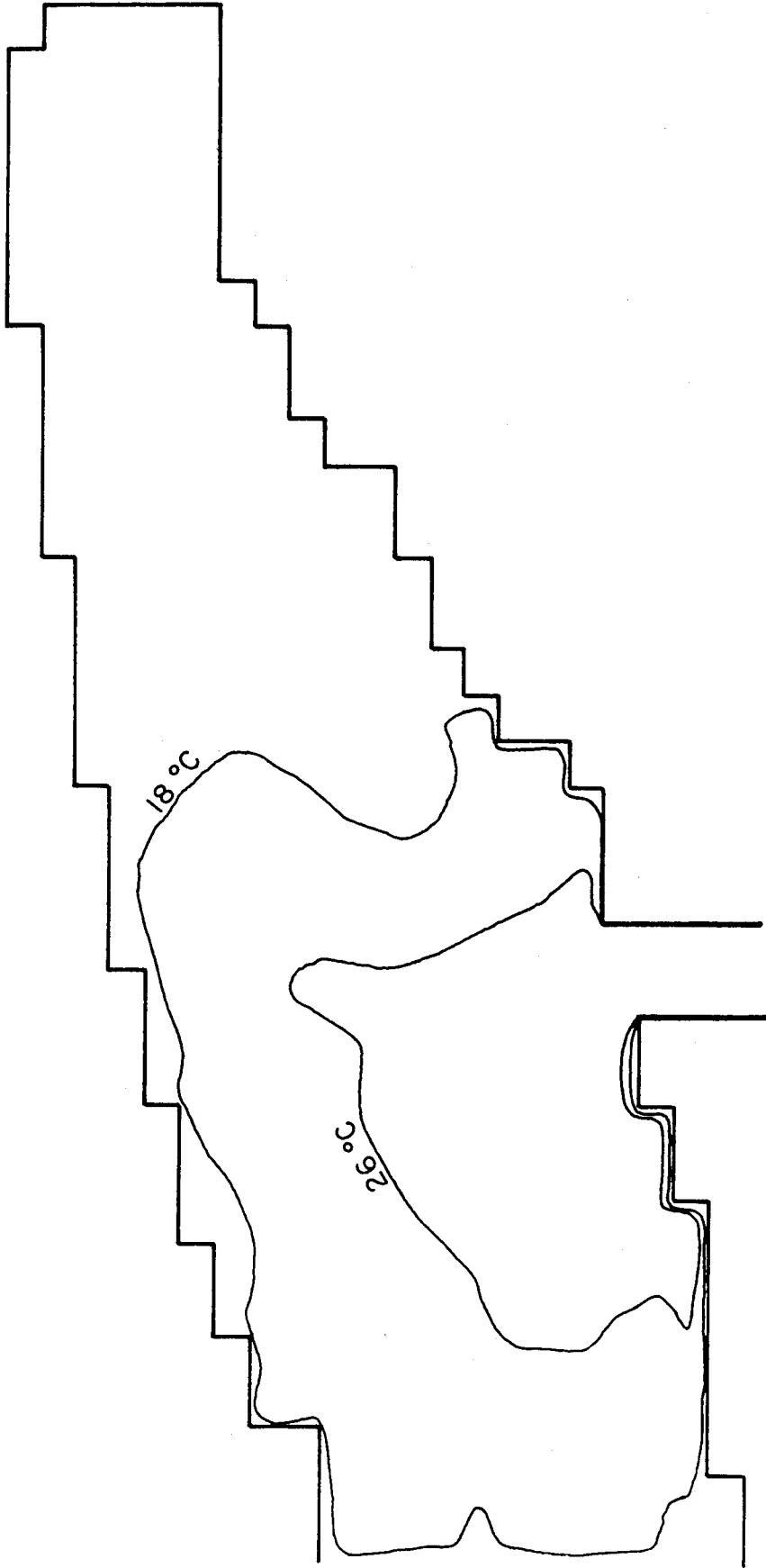


Figure 5 ISOTHERMES APRÈS 40 HEURES

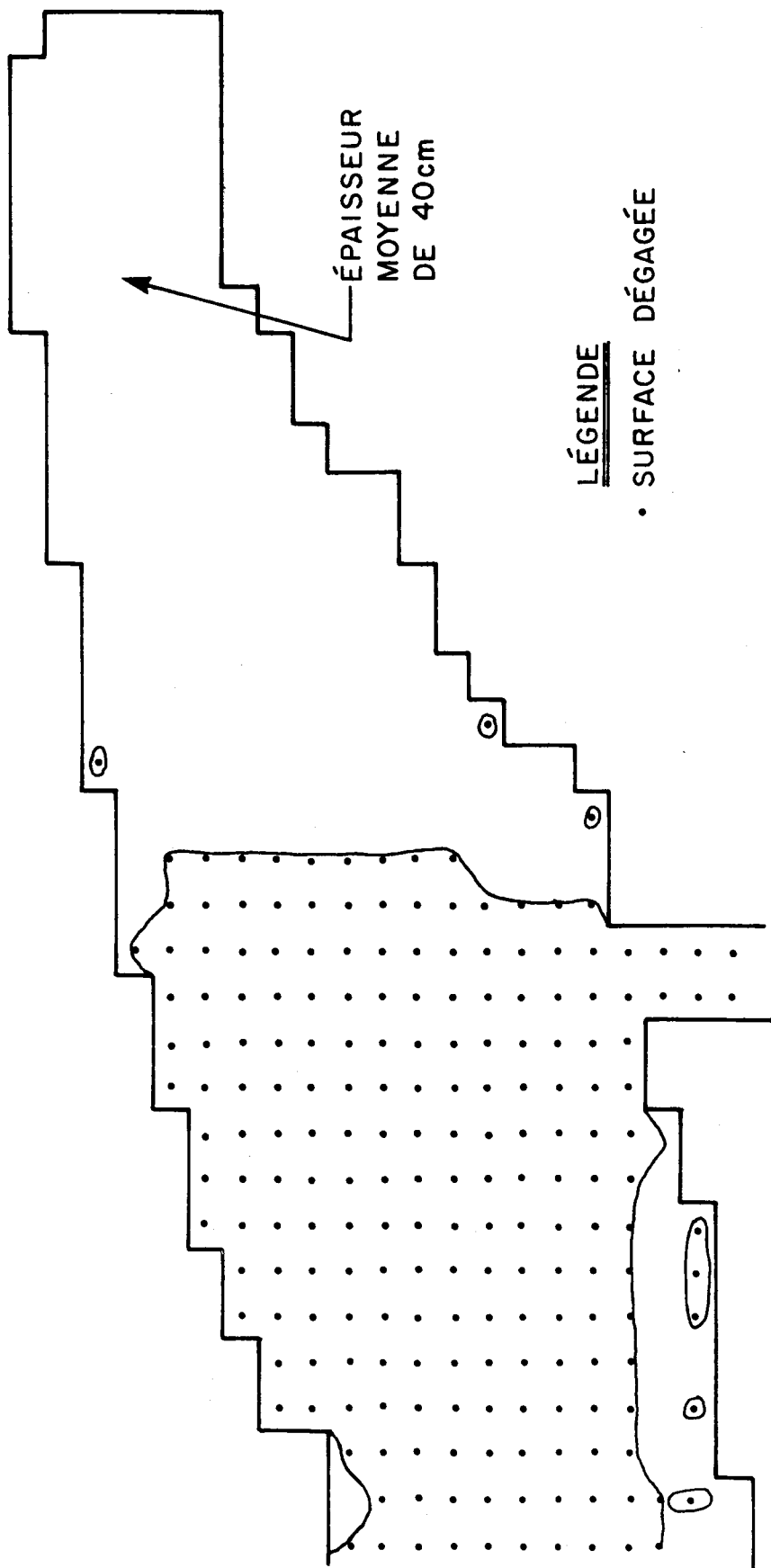


Figure 6 SURFACE DÉGAGÉE APRÈS 40 HEURES